# ゼロ射がゼロを経由して分解する方法

島田要歌

１圏の場合に、ゼロ射がゼロ対象を経由して分解する方法は正真正銘ただ一通りである。しかし、無限圏の場合にはそうではない。これは著者が参加した自主ゼミで（記憶が薄れているので多少の差異はあったかもしれないし、本質的な部分はもう少し先にあったような気がしなくもないが）反例を使ってコメントされた事実である。それから１年半ほどは大して気にも留めていなかったのだが、ふとしたときにゼロ対象を経由する分解たちが成す空間（アニマ）を計算してみたくなった。これは意外と明らかであったのでここに簡単なノートとして書いておく。

**設定 0.1.** $\mathscr{C}$ を安定無限圏、$f : X \to Y$ をそのゼロ射（すなわち、ゼロ対象を経由して分解する射）とする。

**補題 0.2.** $\mathscr{C}$ の次の可換図式が成す空間 $A$ は $\{f\} \times_{\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)} \{f\}$ にホモトピー同値。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \\ 0 \arrow[r, "="'] & 0 \arrow[u] \end{tikzcd}.$$

*証明.* $B \in \mathcal{S}$ を $\mathscr{C}$ の図式

$$X \to 0 \to Y$$

が成す空間とする。これはゼロ対象の定義より contractible である。一方、合成を考えることで $\mathcal{S}$ の射

$$\xi : B \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) : [X \xrightarrow{a} 0 \xrightarrow{b} Y] \mapsto [X \xrightarrow{b\circ a} Y]$$

が定まる。構成から、我々が求めている空間は次の $\mathcal{S}$ における pullback である。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & \{f\} \arrow[d] \\ B \arrow[r, "\xi"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) \end{tikzcd}.$$

$B$ は contractible で $f$ を像に含むので、この pullback は $\{f\} \times_{\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)} \{f\}$ に他ならない。 □

つまり、与えられたゼロ射 $f$ に対して、$f$ のゼロ対象を経由する分解たちが成す空間は、マッピングスペースのループ空間

$$\Omega \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$$

（ただし、$f \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ が基点）であり、このホモトピー群はいくらでも非自明なものになり得る。とくに、連結性すら成り立たない。

以上の観察は、ゼロ射を考えた時に、それをゼロ対象を経由して分解させる方法が、まったくもって非標準的であることを意味している。